IAY0140
ARVUTITE ARITMEETIKA JA LOOGIKA

I ARVUSÜSTEEMID

1. Üldmõisteid

Mõiste **"kodeerimine"** tähendab laiemalt võttes mingi objektide hulga objektide tähistamist kokkulepitud märkide (sümbolite) jadadega. Tavaliselt on kodeeritav objektide hulk lõplik, kuid see võib olla ka loenduv.
Objektile vastav koodkombinatsioon koosneb koodikohtadest ehk **koodijärkudest**.
Kodeerimine viiakse läbi mingi kokkulepitud reeglistiku (**kodeerimisreeglite**) alusel. Kodeeritavate **objektide koguarv** sõltub kodeerimiseks kasutatavate sümbolite arvust, samuti koodikombinatsioonide pikkusest (koodipikkusest, koodi järkude arvust).

Eeldades, et objekt N on võimalik kodeerida n-kohalise koodikombinatsiooniga

$$\mathbf{a_{n-1}a_{n-2}\ \ldots a_i \ldots\ a_1a_0}$$

ning kodeerimiseks kasutatavate sümbolite koguarv on **k**, on kerge leida kasutatavate koodide koguarv korrutisena **n • k**. Juhul kui koodijärgus a_i kasutatakse k_i sümbolit ($k_i \leq k$), avaldub koodide koguarv valemiga $\prod_{i=0}^{n-1} k_i$.

Arvusüsteem on tegelikult üks kodeerimise erijuht, millega tähistatakse arvude kirjapanemise viisi kokkulepitud märkide hulga ja kodeerimisreegli alusel.

Enamus laiemalt kasutatavaid arvusüsteeme on nn. **alusega arvusüsteemid**. Arvusüsteemi alus on selles süsteemis kasutatavate erinevate märkide (sümbolite) arv. Tavakasutuses olevas kümnendsüsteemis on nendeks sümboliteks 0,1,2,....,8,9; kahendsüsteemis kasutatakse märke 0 ja 1; kuueteistkümnend süsteem kasutab lisaks 10 numbrile veel kuut esimest ladina tähestiku suurtähte A,B,C,D,E, ja F.

Arvusüsteeme võib jagada kaheks suuremaks klassiks: positsioonilised ja mittepositsioonilised arvusüsteemid. Suuremat praktilist tähtsust omavate **positsiooniliste arvusüsteemide** põhiomadusteks on see, et igal koodi järgul on oma kindel kaal ja igal kasutataval sümbolil on oma kindel väärtus. **Mittepositsioonilistes arvusüsteemides** need omadused puuduvad. Enamus edasises vaadeldavatest süsteemidest on positsioonilised, mittepositsioonilistest arvusüsteemidest käsitleme lühidalt nn. jäägisüsteemi.

Arvu N kood positsioonilises arvusüsteemis koosneb kokkuleppeliselt täis- ja murdosast, mida eraldab tegelikult kokkuleppelises kohas paiknev koma (punkt). Arvu N koodi, mille täisosas on n kohta ja murdosas (peale koma) m kohta, paneme kirja järgnevalt:

$$\mathbf{a_{n-1}\,a_{n-2}\ \ldots\ a_1\,a_0\ ,\ a_{-1}\,a_{-2}\ \ldots\ a_{-m+1}\,a_{-m}}$$

Arvu N väärtus arvutatakse tavaliselt välja nn. polünoomvalemiga $\sum_{i=-m}^{n-1} a_i p_i$, kus $\mathbf{a_i}$ on järgu väärtus ja $\mathbf{p_i}$ - selle järgu nn. kaal.

Näide
Olgu meil mingi hüpoteetiline arvusüsteem, kus kasutatakse neljakohalisi koode $a_1a_0,a_{-1}a_{-2}$, millest 2 kohta on täisosa ja 2 kohta murdosa. Järkude kaalud on järgnevate väärtustega: $\mathbf{p_1} = 6$, $\mathbf{p_0} = 4$, $\mathbf{p_{-1}} = -0{,}4$, $\mathbf{p_{-2}} = 0{,}3$. Sellisel juhul on arvu N = 23,54 väärtus avaldatav valemiga 2 • 6 + 3 • 4 + 5 • (-0,4) + 4 • 0,3

Kehtestades järkude kaaludele täiendavaid tingimusi, jõuame välja nn. loomulike kaaludega süsteemini, kus järkude kaalud on leitavad järgnevalt:

$p_0 = 1$ (esimese täisosa koha kaal, vahetult koma "ees")

$p_i = \prod_{j=0}^{i-1} k_j$, i>0; ("vanemad" täisosa järkude kaalud, k_j - järgus j kasutatavate sümbolite arv).

$p_i = \prod_{j-1}^{i} k^{-j}$, i<0; (murdosa järkude kaalud)

Näide
Olgu meil hüpoteetiline loomulike kaaludega arvusüsteem, kus kasutatakse kuuekohalisi koode $a_3a_2a_1a_0,a_{-1}a_{-2}$, millest 4 kohta on täisosa ja 2 kohta murdosa. Järkude kasutatavate sümbolite arv on: $\mathbf{k_3} = 5$, $\mathbf{k_2} = 4$, $\mathbf{k_1} = 3$, $\mathbf{k_0} = 6$, $\mathbf{k_{-1}} = 8$, $\mathbf{k_{-2}} = 5$. Järkude kaalud kujunevad järgnevalt:
$\mathbf{p_3} = 3 \bullet 6 \bullet 4 = 72$, $\mathbf{p_2} = 3 \bullet 6 = 18$, $\mathbf{p_1} = 6$, $\mathbf{p_0} = 1$, $\mathbf{p_{-1}} = 1/8$, $\mathbf{p_{-2}} = 1/(8 \bullet 5) = 1/40$
ning näiteks arvu N=3314,62 väärtus avaldub polünoomvalemiga
3 • 72 + 3 •18 + 1 • 6 + 4 •1 + +6 • (1/8) + 2 • (1/40)

Kui fikseerime veel täiendavalt, et kõigi järkudes kasutatavate sümbolite arv $\mathbf{k_i}$ on võrdne väärtusega p, jõuamegi välja **arvusüsteemini alusega p**, kus kehtivad järkude kaalud $\mathbf{p_i} = \mathbf{p^i}$ (arvestame, et $p^0 = 1$) ning arvu väärtuse saame leida polünoomvalemiga: N = $\sum_{i=-m}^{n-1} a_i p^i$
Arvusüsteemini alusega p kasutatakse üldjuhul märke{0,1,…,p-1}.

Enamkasutatavad arvusüsteemide alused:
- positiivsed (2, 3, 8, 10, 16)
- negatiivsed (-2) - vaatleme hiljem lühidalt
- murdväärtused - pakuvad eelkõige teoreetilist huvi.

Püüame hinnata, millise alusega arvusüsteem võiks olla kõige ökonoomsem.
Kui arvusüsteemi alus on p ja kasutatavate järkude arv n, saame selles süsteemis kujutada kujutada $N = p^n$ arvu.
Eeldame, et järgu hind on proportsionaalne alusega p. Järelikult on kirjeldatud arvuformaadi "hind":

$$C = k \bullet n \bullet p = \frac{k \bullet p \bullet \log_e N}{\log_e p}, \text{ kuna } n = \frac{\log_e N}{\log_e p}$$

Sellisel moel tekkinud nn hinnafunktsiooni miinimumi saame leida, võttes tuletise aluse p järgi ja võrrutades selle nulliga:

$$\frac{dC}{dp} = k \log_e N \left(\frac{1}{\log_e p} - 1 \right) = 0 \text{, kui p=e.}$$

Seega on teoreetiliselt ökonoomseim süsteem alusega e, praktiliselt aga talle lähimad täisarvulise alusega arvusüsteemid - kahend- ja kolmendsüsteem.

Mittepositsiooniliste arvusüsteemide tüüpilise näitena tuuakse tavaliselt rooma numbrite süsteem, kus pole täidetud eelpool toodud positsiooniliste süsteemide põhiomadused. Rooma numbrite süsteemis on sümbol I väärtusega kas 1 või (-1), sõltuvalt sellest, kus ta paikneb muude sümbolite suhtes
Näiteks: IX = (-1) + 10 = 9_{10} ning XI = 10 + 1 = 11_{10}.
Samuti ei saa fikseerida korrektselt järkude kaalude väärtusi.

Arvusüsteeme võib klassifitseerida veel ka nn. liiasteks ja mitteliiasteks arvusüsteemideks. **Liiases arvusüsteemis** kehtib "üks-mitmele" kodeering ehk eksisteerib mitu erinevat koodikombinatsiooni, mis on sama arvu kodeeringuks.
Sellise süsteemi näitena vaatleme hiljem lühidalt kahendsüsteemi märkidega 1,0,-1, kus koodikombinatsioonide arv ületab esitatavate arvude diapasooni.
Arvusüsteemi liiasust võib kasutada arvusüsteemi **häirekindluse tõstmiseks**.
Enamus edasises vaadeldavaid süsteeme on **mitteliiased süsteemid**.

2. Teisendused positsioonisüsteemide vahel

Järgnevas on kirjeldatud täis- ja murdarvude teisendusi kahe suvalise alusega arvusüsteemi vahel (arvusüsteemist alusega p arvusüsteemi alusega q).
Vaatleme kõigepealt **täisarve**.
Olgu meil nn. "vana süsteem", kust me teisendame, alusega p. Arvu N väärtus on leitav järgneva polünoomvalemiga.

$$N = a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2\, a_1\, a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i \qquad (1)$$

Vaja on leida arvu N esitus nn "uues süsteemis", kuhu me teisendame ja mille alus on q ja kus kehtib alltoodud polünoomvalem.

$$N = b_{k-1}\, b_{k-2} \ldots b_2\, b_1\, b_0 = \sum_{i=0}^{k-1} b_i q^i \qquad (2)$$

Täisarvude regulaarne teisendus (nn. Horneri teisendus) toimub järgnevalt.
Kirjutame lahti valemi (2).
$N = b_{k-1} \bullet q^{k-1} + b_{k-2} \bullet q^{k-2} + \ldots + b_2 \bullet q^2 + b_1 \bullet q^1 + b_0 =$
Võtame kõigist polünoomi liikmetest v.a. viimane aluse q "sulgude taha".
$=(b_{k-1} \bullet q^{k-2} + b_{k-2} \bullet q^{k-3} + \ldots + b_2 \bullet q^1 + b_1) \bullet q + b_0 =$
Kordame seda tegevust sulgude sisse jäänud avaldisega.
$= ((b_{k-1} \bullet q^{k-3} + b_{k-2} \bullet q^{k-4} + \ldots + b_2) \bullet q + b_1) \bullet q + b_0 = \ldots\ldots$
jne.

Selline tegevus vastab tegelikult teisendatava arvu tsüklilisele jagamisele uue arvusüsteemi alusega q, kusjuures igal jagamisel leitakse jagatis (sulgude sisse jääv väärtus) ja nn. "vabaliikmena" eraldub jääk b_i , alates noorimast järgust b_0. Kogu teisendus toimub vana arvusüsteemi aritmeetikareeglite alusel.

Näited.

- Teisendada arv 93_{10} (indeksina näitame arvusüsteemi, milles arv on esitatud) kahendsüsteemi arvuks X_2 .

93 : 2 = 46, jääk 1 (= b_0)
46 : 2 = 23, jääk 0 (= b_1)
23 : 2 = 11, jääk 1 (= b_2)
11 : 2 = 5, jääk 1 (= b_3)
5 : 2 = 2, jääk 1 (= b_4)
2 : 2 = 1, jääk 0 (= b_5)
1 : 2 = 0, jääk 1 (= b_6)

Kuna esimesena arvutasime välja noorima järgu b_0 , kirjutame kahendarvu "alt üles":
$93_{10} = 1011101_2$

- Teisendada arv 93_{10} neljandsüsteemi arvuks X_4

93 : 4 = 23, jääk 1 (= b_0)
23 : 4 = 5, jääk 3 (= b_1)
5 : 4 = 1, jääk 1 (= b_2)
1 : 4 = 0, jääk 1 (= b_3)

$93_{10} = 1131_4$

- Teisendada arv 95_{10} kaheteistkümnendsüsteemi arvuks X_{12}

95 : 12 = 7, jääk 11 (= b_0)
7 : 12 = 0, jääk 7 (= b_1)

Kuna 12-süsteemis on jääkide võimalikud väärtused 0-st kuni 11-ni, kasutatakse täiendavalt 10 numbrile ka tähti A=10 ja B=11.

$95_{10} = 7B_{12}$

- Teisendada viiendsüsteemi arv 334_5 kümnendsüsteemi.

Teisendada võiks samuti Horneri skeemi kasutades, kuid siis peaks teisendus toimuma viiendsüsteemi aritmeetikareeglite alusel. Lihtsam on siin rakendada polünoomvalemit ja leida:
$334_5 = 3\bullet 5^2 + 3\bullet 5^1 + 4\bullet 5^0 = 94_{10}$

- Teisendada kahendsüsteemi arv 1101101_2 kümnendsüsteemi.

Teisendus polünoomiga
$1101101_2 = 1\bullet 2^6 + 1\bullet 2^5 + 0\bullet 2^4 + 1\bullet 2^3 + 1\bullet 2^2 + 0\bullet 2^1 + 1\bullet 2^0 = 109_{10}$

Teisendus Horneri skeemiga, esitades "uue" arvusüsteemi alus 10_{10} kahendsüsteemis 1010_2 ja viies jagamine läbi kahendsüsteemi reeglite alusel:

$1101101_2 : 1010_2 = 1010_2$, jääk 1001_2 (= b_0 , s.o. 9_{10})
$1010_2 : 1010_2 = 1_2$, jääk 0 (= b_1)
$1_2 : 1010_2 = 0_2$, jääk 1 (= b_2)

$1101101_2 = 109_{10}$

Murdarvude teisendamiseks süsteemist alusega p süsteemi alusega q toimime järgnevalt.

$N = 0,a_{-1}\, a_{-2} \ldots a_{-k+1}\, a_{-k} = \sum_{i=-1}^{-k} a_i p^i$ (vana süsteem)

$N = 0,b_{-1}\, b_{-2} \ldots b_{-m+1}\, b_{-m} = \sum_{i=-1}^{-m} b_i q^i$ (uus süsteem)

Kirjutame "uue süsteemi" polünoomi lahti.

$N = b_{-1} \bullet q^{-1} + b_{-2} \bullet q^{-2} + b_{-3} \bullet q^{-3} + \ldots + b_{-m+1} \bullet q^{-m+1} + b_{-m} \bullet q^{-m}$

Korrutame võrduse mõlemad pooled läbi uue alusega q.

$N \bullet q = b_{-1} + (b_{-2} \bullet q^{-1} + b_{-3} \bullet q^{-2} + \ldots + b_{-m+1} \bullet q^{-m+2} + b_{-m} \bullet q^{-m+1})$

Paremal pool tekib täisosa b_{-1} ja sulgudesse jääv murdosa. Viime tekkinud täisosa b_{-1} vasakule poole ja korrutame uuesti alusega q.

$(N \bullet q - b_{-1}) \bullet q = b_{-2} + (b_{-3} \bullet q^{-1} + \ldots + b_{m+1} \bullet q^{-m+3} + b_{-m} \bullet q^{-m+2})$

Täisosana paremal pool tekib väärtus b_{-2} . Kordame tegevust (viime täisosa vasakule ja korrutame uuesti).
Seega taandub murdarvude teisendamine sellele, et korrutatakse teisendatavat arvu tsükliliselt uue arvusüsteemi alusega q ja eraldatakse pärast iga korrutamist tekkinud täisosa. Tegevus toimub "vanas süsteemis" kehtivate aritmeetikareeglite alusel.

<u>Näited.</u>

- Teisendada arv $0,3_{10}$ kahendsüsteemi arvuks X_2

$0,3 \bullet 2 = 0,6$ (täisosa 0, $b_{-1} = 0$)
$0,6 \bullet 2 = 1,2$ (täisosa 1, $b_{-2} = 1$)
NB! Enne korrutamist lahutame täisosa maha 1,2 -1 = 0,2
$0,2 \bullet 2 = 0,4$ (täisosa 0, $b_{-3} = 0$)
$0,4 \bullet 2 = 0,8$ (täisosa 0, $b_{-4} = 0$)
$0,8 \bullet 2 = 1,6$ (täisosa 1, $b_{-5} = 1$)
$0,6 \bullet 2 = 1,2$ (täisosa 1, $b_{-6} = 1$)
jne.

Näeme, et arvutus ei koondu. Leitav murdosa järkude arv on sõltuvuses sellest, milline oli teisendatava arvu täpsus. Lugedes meie näite puhul arvu 0,3 täpsuseks

ligikaudu ± 0,05 (kümnendarv 0,3 on võimalik saada arvude 0,25 kuni 0,34 ümardamisel ühe kohani peale koma) ja eeldades, et me esitame kahendarvu ligikaudu sama täpsusega, oleks otstarbekas esitada kahendmurd viie kohaga peale koma, kuna viienda koha kaal on ligikaudu sama, täpsemalt 1/32 ehk 0,03125. Seega on praegused arvutused piisavad. Järgu b_{-6} väärtust võime kastuda **ümardamiseks.** Ümardamine kahendsüsteemis on väga lihtne. Arvutatakse välja üks liiane nn. "ümardusjärk" ja kui see on võrdne 1-ga, toimub ümardamine ülespoole (liidetaks 1 allesjääva osa nooremasse järku). Vastasel juhul tomub ümardamine allapoole ehk lisajärgu võib lihtsalt ära jätta.

Seega praeguse näite korral kirjatades leitud murdosa järgud "ülevalt alla", saame:
$0{,}3_{10} \approx 0{,}010011_2$ ning ümardades 5 kohani peale koma saame ümardatud tulemuseks:
$0{,}3_{10} \approx 0{,}01001_2 + 0{,}00001_2 = 0{,}01010_2$

- Teisendada arv $0{,}3_{10}$ neljandsüsteemi arvuks X_4

Korrutades teisendatavat arvu regulaarselt 4-ga, saame:
$0{,}3 \bullet 4 = 1{,}2$ (täisosa 1, $b_{-1} = 1$)
NB! Enne korrutamist lahutame täisosa maha 1,2 -1 = 0,2
$0{,}2 \bullet 4 = 0{,}8$ (täisosa 0, $b_{-2} = 0$)
$0{,}8 \bullet 4 = 3{,}2$ (täisosa 3, $b_{-3} = 3$)
$0{,}2 \bullet 4 = 0{,}8$ (täisosa 0, $b_{-4} = 0$)

$0{,}3_{10} \approx 0{,}1030_4$ ja pärast ümardamist allapoole $\approx 0{,}103_4$

Märgime, et neljandsüsteemis on ümardusreeglid järgnevad. Kui lisajärk on võrdne 0 või 1-ga, ümardatakse allapoole; kui lisajärk on 2 või 3, ümardatakse ülespoole ja liidetakse nooremale allesjäävale järgule +1. Analoogselt toimub ümardamine kõigis positsioonilistes arvusüsteemides.

- Teisendada arv $0{,}3_{10}$ kaheteistkümnendsüsteemi arvuks X_{12}, leides uue arvu kahe kohaga peale koma.

Korrutades teisendatavat arvu regulaarselt 12-ga, saame:
$0{,}3 \bullet 12 = 3{,}6$ (täisosa 3, $b_{-1} = 3$)
NB! Enne korrutamist lahutame täisosa maha 3,6 - 3 = 0,6
$0{,}6 \bullet 12 = 7{,}2$ (täisosa 7, $b_{-2} = 7$)
$0{,}2 \bullet 12 = 2{,}4$ (täisosa 2, ümardusjärk $b_{-3} = 2$)

$0{,}3_{10} \approx 0{,}37_{12}$ (ümardamine allapoole)

- Teisendada arv $0{,}34_6$ kümnendsüsteemi arvuks X_{10}.

Teisenduseks võib kasutada, kasutades polünoomvalemit:
$3 \bullet 6^{-1} + 4 \bullet 6^{-2} \approx 0{,}61_{10}$
Teisendus on võimalik ka Horneri teisenduse baasil, kuid vastavad arvutused tuleks teha kuuendsüsteemi reeglite alusel.

- Teisendada arv $0{,}110101_2$ kümnendsüsteemi arvuks X_{10}.

Võime kasutada jällegi polünoomvalemit:

$0{,}110101_2 = 1 \bullet 2^{-1} + 1 \bullet 2^{-2} + 1 \bullet 2^{-4} + 1 \bullet 2^{-6} \approx 0{,}828_{10}$

Samuti võime kasutada Horneri teisendust, kuigi see kujuneb tunduvalt tülikamaks "käsitsiarvutusel".

$0{,}110101_2 \bullet 1010_2 = 1000{,}010010_2$ ($b_{-1} = 1000_2 = 8_{10}$)
$0{,}010010_2 \bullet 1010_2 = 10{,}110100_2$ ($b_{-2} = 10_2 = 2_{10}$)
$0{,}110100_2 \bullet 1010_2 = 1000{,}001000_2$ ($b_{-3} = 1000_2 = 8_{10}$)

$0{,}110101_2 \approx 0{,}828_{10}$

Segaarvude teisendused, mis sisaldavad nii täis- kui ka murdosa, toimuvadki kahe erineva teisenduse koosrakendusena - täisosa teisendatakse eraldi, siis teisendatakse murdosa ja tulemusse kirjutatakse uue süsteemi täis- ja murdosa vastavalt enne ja pärast koma.

Näited.
$19{,}3_{10} = 10011{,}01010_2$
$111011{,}100110_2 = 59{,}59_{10}$