Loogikafunktsiooni võib "lõpuni määrata" ka meelevaldselt / juhuslikult, kuid enamasti tasub seda teha sihipäraselt — misjuhul saavutame talle "esindajaks" **lihtsaima võimaliku loogikaavaldise**.

Olles "määranud lõpuni" mingi *osaliselt määratud* funktsiooni, oleme talle valinud esindajaks ühe *täielikult määratud* funktsiooni .

Täielikult määratud funktsioon on vaadeldav **osaliselt** määratud funktsiooni erijuhtumina, kus *määramatuspiirkond* puudub.

ülesanne:

Leida **Karnaugh' kaardiga MDNK** ja **MKNK** (osaliselt määratud) 4-muutuja loogikafunktsioonile:

$$f(x_1 \dots x_4) = \prod(1,\ 4,\ 5,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13,\ 15)_0 \quad (3,\ 14)_-$$

Tuvasta, kas leitud *normaalkujud* on **omavahel võrdsed**: **MDNK = MKNK** ?

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

MDNK ja MKNK leidmised on teineteisest sõltumatud ja nad võib leida ükskõik kumbas järjekorras.

Leiame esimesena **MDNK**

! DNK saadakse alati loogikafunktsiooni **1de piirkonnast !**

ehk : kontuuridega tuleb kaardil katta **1**-de ruudud

Kontuuride valimise reeglid

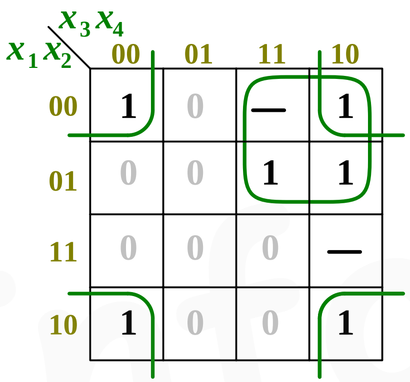
1. Katame kaardil asuvad **1**de ruudud **suurimate** kontuuridega, kasutades seejuures **võimalikult vähe** kontuure. (**0**-lle ei tohi valida **1**-de kontuuridesse)

2. *Määramatuse* ruute tohib seejuures kontuuridega katta, kuid ei pea katma. *Määramatusi* katame kontuuridega ainult siis, **kui see aitab kasvatada veelgi suuremaks mõnda niikuinii vajalikku kontuuri**.

3. Kontuurid tohivad kattuda — peavad olema suurimad võimalikud.

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

parim kontuuridevalik selle funktsiooni **1**-de piirkonna jaoks:



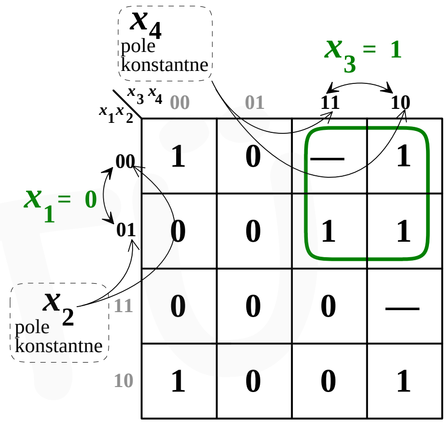
MDNK väljakirjutamiseks analüüsime ühekaupa igat valitud kontuuri, (suvalises järjekorras, üks kontuur korraga)

kontuuri analüüsimisel tuvastame:

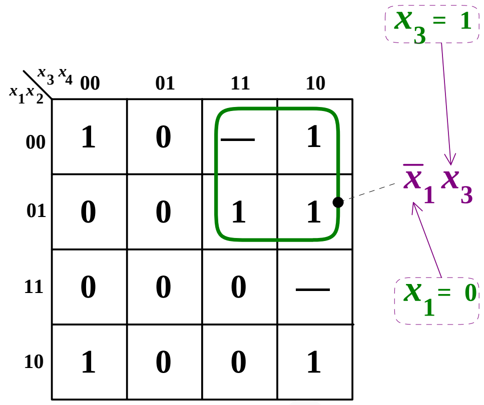
millised muutujad on **konstantsed selle kontuuri ulatuses**

ehk

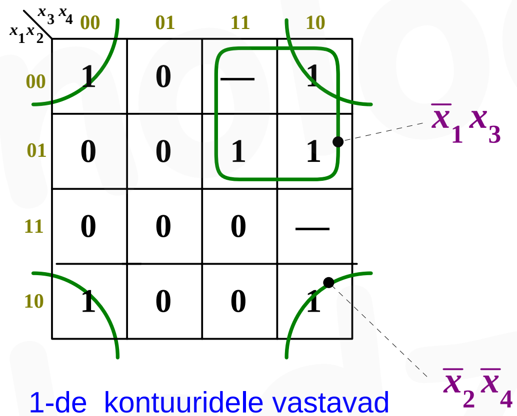
millistes piirkondades asub see kontuur **tervikuna**



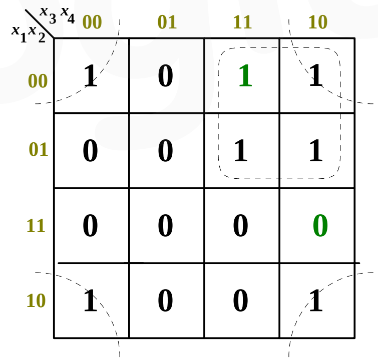
konstantsed muutujad
vaadeldavas kontuuris



1-de kontuurile vastav
elementaarkonjunktsioon



1-de kontuuridele vastavad
elementaarkonjunktsioonid



osaliselt määratud funktsiooni
MDNK-esituseks valitud
täielikult määratud funktsioon

kaardilt väljakirjutatud **MDNK** : $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$

Osaliselt määratud funktsioon on sellega "lõpuni määratud"

kontuuride äravalimine toob endaga koheselt kaasa ka senise *osaliselt määratud* loogikafunktsiooni <u>lõpunimääramise</u> *täielikult määratud* funktsiooniks (ehk *määramatuspiirkond* saab ärajaotatud **1**de ja **0**de piirkonna vahel).

*...kui oleks valitud **1**de katmiseks 4ruudulise asemel väiksem ehk 2ruuduline kontuur ?*

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

ebaoptimaalsem kontuuridevalik 1de katmiseks

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

. . . selle kontuurivalikuga oleks esindajaks valitud selline **täielikult määratud funktsioon**

$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$ esimene elementaarkonjunktsioon tuleb seljuhul teistsugune : uuest kontuuridevalikust väljakirjutatud DNK :

$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$

väiksemas kontuuris on **rohkem** konstantseid muutujaid, mis põhjustab enamate liikmetega (ehk **keerukamat**) loogikaavaldist / normaalkuju.

. . . järelikult tasub valida SUURIMAD võimalikud kontuurid, misjuhul tuleb avaldisse VÄHIM arv algterme x_i ehk saame minimaalseima normaalkuju.

MDNK leitud ja analüüsitud — edasi leiame samale funtsioonile **MKNK** :

! KNK saadakse alati loogikafunktsiooni **0de piirkonnast !**

MKNK leidmisel teeme kõik samad toimingud, kuid **duaalselt vastupidi** : katame suurimate võimalike kontuuridega **0**-de piirkonna ehk **0**-de ruudud:

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

esimesena märgatav kontuuridevalik

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

teine võimalik / sobiv kontuuridevalik

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

kolmas võimalik / sobiv
kontuuridevalik

ükski 3st sobivast kontuuridevalikust pole ülejäänud kahe suhtes parem / pole eelistatud, kuna kõik nad kasutavad **3** tk **4**-ruudulisi kontuure ehk kõik nad annavad **sama keerukusega KNK** (leidub 3 erinevat MKNK-d)

kirjutame MKNK välja esimesest (ehk kõige kergemini märgatavast) kontuuridevalikust:

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

esimesena märgatav
kontuuridevalik

MKNK keerukus on soovikorral juba näha, sest *kontuurid* on juba valitud: kontuuride **arvust** ja nende **suurusest** tulenevalt oleme saamas sellise keerukusega MKNK-d : (**3** *elementaardisjunktsiooniga*, igas **2** *algtermi*) :

KNK on (tehete mõttes) **duaalselt vastupidine** normaalkuju **DNK** suhtes :

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = (x \lor x)(x \lor x)(x \lor x)$$

! *tüüpiline viga:*

KNK jaoks (ehk **0**-de kontuuridest) tekkivad inversioonid **duaalselt vastupidi** (DNK ehk **1**-de kontuuride suhtes) :

[illegible] kontuuris konstantne väärtus **1** annab **inversioonis** algtermi ;

nullide kontuuris konstantne väärtus **0** annab **otseväärtuses** algtermi ;

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

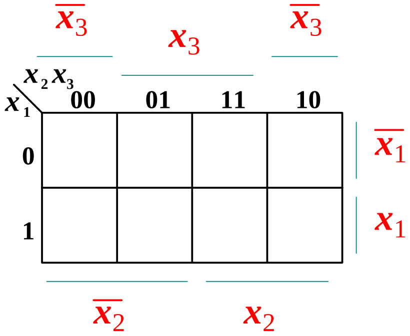
lahendiks valitud MKNK
kontuuridekomplekt

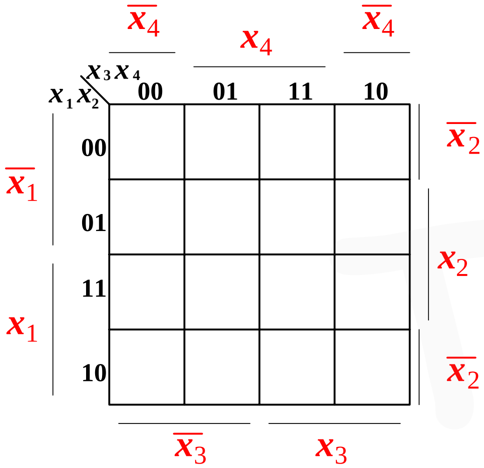
$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = (\bar{x}_2 \lor x_3)(x \lor x)(x \lor x)$$

MKNK:

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = (\bar{x}_2 \lor x_3)(x_3 \lor \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \lor \bar{x}_4)$$

pane tähele :





piirkondade tähised on (algtermidena) õiged ainult **DNK jaoks !**

Et saadud normaalkujudele saaks viidata, tähistame leitud MDNK ja MKNK :

$$f_K = (\bar{x}_2 \vee x_3)(x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$$

$$f_D = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$$

vaatleme, milleks arvutuvad leitud normaalkujud *määramatuspiirkonnas.*

milleks arvutub leitud **MDNK**

funktsiooni **määramatuspiirkonnas :** { 0011 1110 } **?**

$f_D(0011) = ?$

$f_D(1110) = ?$

$$f_D(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

$f_D(0011) = 1$

$f_D(1110) = 0$

$$f_K = (\bar{x}_2 \vee x_3)(x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$$

milleks arvutub leitud MKNK

funktsiooni **määramatuspiirkonnas :** { 0011 1110 } **?**

$f_K(0011) = ?$

$f_K(1110) = ?$

$$f_K(x_1 x_2 x_3 x_4) = (\bar{x}_2 \vee x_3)(x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

MKNK leidmise kontuuridevalik

$f_K(0011) = 1$

$f_K(1110) = 1$

kas leitud MDNK ja MKNK on teineteisega loogiliselt võrdsed ?

$f_D = f_K$?

meenutame:

loogikaavaldised on **võrdsed** kui nende tõeväärtustabelid on samasugused.

Osaliselt määratud funktsiooni esindajateks valitud MDNK ja MKNK **võrdsus** oleneb sellest, milleks nad arvutuvad *määramatuspiirkonnas*.

Siin leitud mõlemad normaalkujud f_D f_K **ei ole** teineteisega võrdsed:

$f_D \neq f_K$ sest

$f_D(1110) \neq f_K(1110)$ kuid

$f_D(0011) = f_K(0011)$

tõeväärtustabelite **eelviimane** rida on neil erinev :

$f_D(1110) = 0$

$f_K(1110) = 1$

$x_1 x_2 x_3 x_4$	f_D	f_K
0 0 0 0	1	1
0 0 0 1	0	0
0 0 1 0	1	1
0 0 1 1	1	1
0 1 0 0	0	0
0 1 0 1	0	0
0 1 1 0	1	1
0 1 1 1	1	1
1 0 0 0	1	1
1 0 0 1	0	0
1 0 1 0	1	1
1 0 1 1	0	0
1 1 0 0	0	0
1 1 0 1	0	0
1 1 1 0	0	1
1 1 1 1	0	0

$x_1 x_2 \backslash x_3 x_4$	00	01	11	10
00	1	0	–	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	–
10	1	0	0	1

0011 korral väärtustuvad MDNK ja MKNK samamoodi (1)

1110 korral väärtustuvad MDNK ja MKNK erinevalt

0-de ja 1-de kontuurid samal kaardil

sellel funktsioonil on täpselt **1** MDNK kuid **3** erinevat MKNK-d kui oleksime valinud lahendiks mõne teise **MKNK** — kas seljuhul oleks leidunud ka selline MKNK, mis juhtumisi on võrdne sama funktsiooni MDNK-ga **?**

vaatame kõigi nelja funktsiooni (1 + 3) **tõeväärtustabeleid** kaartidel :

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

MDNK jaoks parim "esindaja" :
täielikult määratud loogikafunktsioon

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

MKNK jaoks meievalitud esindaja :
täielikult määratud loogikafunktsioon

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

MKNK jaoks **teine** võimalik esindaja :
täielikult määratud loogikafunktsioon

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

MKNK jaoks **kolmas** esindaja:
täielikult määratud loogikafunktsioon

ilmneb, et selle funktsiooni ükski **MKNK** ei ole juhtumisi võrdne **MDNK**-ga
see pole probleem — nad ei peagi olema võrdsed; (küsisime uudishimust...)

ülesanne:

Leia **Karnaugh' kaardi** abil MDNK samale funktsioonile, mille TDNK lihtsustasime eelpool näites MDNK-ks

$x_1\ x_2\ x_3$	$f\,(x_1\ x_2\ x_3)$
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

kanname tõeväärtustabeli 3-muutuja kaardile:

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0				
1				

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1

MDNK :

$$f\,(x_1x_2x_3) \;=\; x_2 \;\vee\; x_1x_3 \;\vee\; \bar{x}_1\bar{x}_3$$

MDNK-ks saime sama tulemuse nagu enne TDNK teisendamisel

. . . . meenutame varasema teisenduse lõppu :

$$. . . = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 (\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1 x_3 =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1 x_3$$

ülesanne:

Leida **Karnaugh' kaardiga** MDNK MKNK 5-muutuja funktsioonile:

$$f (x_1 . . . x_5) = \sum (0 , 2 , 6 , 7 , 8 , 10 , 24 , 30)_1 \quad (3, 14 , 16 , 18 , 26)_-$$

kanname tõeväärtustabeli 5-muutuja kaardile:

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$x_1 = 1$

$x_1 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	—	0	0	—
01	0	0	0	0
11	0	0	0	1
10	1	0	0	—

$x_1 = 1$

MDNK :

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	1		—	1
01			1	1
11				—
10	1			1

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	—			—
01				
11				1
10	1			—

$x_1 = 1$

$x_1 = 0$

$x_1 = 1$

MDNK :

$$f (x_1 . . . . x_5) = \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_2 x_4 \bar{x}_5$$

see on ainus MDNK sellel (osaliselt määratud) funktsioonil

MKNK :

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00		0	—	
01	0	0		
11	0	0	0	—
10		0	0	

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	—	0	0	—
01	0	0	0	0
11	0	0	0	
10		0	0	—

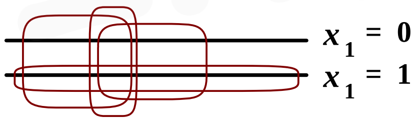
$x_1 = 1$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	1		—	1
01			1	1
11				—
10	1			1

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	—			—
01				
11				1
10	1			—

$x_1 = 1$



MKNK :

$$f(x_1 \ldots x_5) = (\bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_5)(x_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee x_2)$$

siin leidub ka teine, sama keerukusega MKNK

ruut **00001** on kaetav ka muu 8-ruudulise ehk samasuure kontuuriga :

loobudes punasest ja rakendades punase asemel **oranzi** kontuuri :

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	1		—	1
01			1	1
11				—
10	1			1

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	—			—
01				
11				1
10	1			—

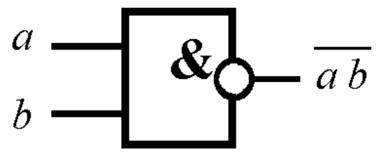
$x_1 = 1$

Loogikaskeemide realiseerimine JA-EI loogikaelementidel

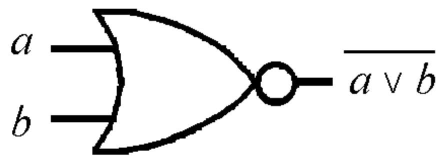
Loogikaskeemide realiseerimine VÕI-EI loogikaelementidel

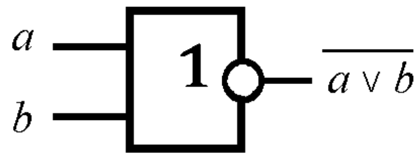
meenutame :

JA-EI element teeb oma sisendite **konjunktsiooni inversiooni** (NAND) :



VÕI-EI element teeb oma sisendite **disjunktsiooni inversiooni** (NOR) :





TÄHTSUS:

Suvalise digitaalse töötluse saab koostada, kasutades ainult elemente **JA-EI**