

HULGAD

Mõistel "*hulk*" pole definitsiooni. **Hulk** on fundamentaalne baasmõiste.

Hulga mõiste selgitus võiks olla:

"... *hulk on koosvaadeldavate objektide (hulgaelementide) kogum* ..."

Hulk koosneb hulgaelementidest. (Hulk sisaldab elemente)

Hulga esitamine

Hulka tähistatakse suurtähtedega: **A B C D**

Hulka võib esitada:

- ♦ tema elementide täieliku loeteluna loogsulgude vahel:

$\{ a, e, i, o, u, \tilde{o}, \tilde{a}, \tilde{o}, \tilde{u} \}$ või $\{ a \ e \ i \ o \ u \ \tilde{o} \ \tilde{a} \ \tilde{o} \ \tilde{u} \}$

(komast võib loobuda, kui iga hulgaelement esitub üksiku tähemärgi abil)

- ♦ tema elementide osalise loeteluna, mis esitab mingit regulaarset äratuntavat seaduspärasust:

$\{ \dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$

$\{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$

$\{ 0, 1, 2, 3, \dots, 99 \}$

$\{ 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots \}$

$\{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \}$

$\{ 0, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots \}$

- ♦ üldise avaldise kaudu, mis kehtib kõigi hulgaelementide jaoks:

$\{ n \mid (n > 1899) \wedge (n < 2000) \}$

$\{ x \mid x \bmod 2 = 0 \}$

$\{ x \mid x \bmod 2 = 1 \}$

(avaldise $x \bmod 2$ tähendus selgub edaspidi)

$\{ a \mid a \text{ on algarv} \}$

ehk $\{ \text{hulgaelemendi tähis} \mid \text{lause, mis kehtib selle hulga iga elemendi korral} \}$

Kui hulk on tähistatud mingi suurtähega, siis:

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{a e i o u õ ä ö ü} \}$$

$$\mathbf{Z} = \{ \dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

\mathbf{N} tähistab tavaliselt *naturaalarvude* hulka ja \mathbf{Z} *täisarvude* hulka.

Hulkade võrdsus

Hulgad on *võrdsed*, kui nad koosnevad samadest elementidest:

$$\{ \mathbf{1 3 5} \} = \{ \mathbf{5 1 3} \} = \{ \mathbf{5 3 1} \}$$

Hulgaelemendid ei ole hulgas üksteise suhtes kuidagi järjestatud.

Hulgas ei ole korduvaid elemente. Igat hulgaelementi on hulgas "üks eksemplar": $\{ \mathbf{1 3 3 5 5 5} \} = \{ \mathbf{1 3 5} \}$

Hulgaelemendi \mathbf{e} kuulumist hulka \mathbf{V} tähistatakse: $\mathbf{e} \in \mathbf{V}$

Elemendi \mathbf{d} mittekuulumist hulka \mathbf{V} tähistatakse: $\mathbf{d} \notin \mathbf{V}$

Osahulk (Alamhulk)

Hulk \mathbf{A} on hulga \mathbf{B} **osahulk** (alamhulk): $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ kui hulga \mathbf{A} iga element on samal ajal ka hulga \mathbf{B} elemendiks:

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \iff \forall x (x \in \mathbf{A} \rightarrow x \in \mathbf{B})$$

Iga hulk on ka iseenda osahulgaks: $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}$

Kui 2 hulka osutuvad teineteise osahulkadeks, siis nad on võrdsed:

$$(\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \subset \mathbf{A}) \iff \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Teise hulga (näiteks \mathbf{B}) osahulgaks mitteolemist esitatakse: $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$

Märgime, et *hulka kuulumise* (mittekuulumise) ja *osahulgaks olemise* (mitteolemise) avaldised omavad ka tõeväärtust. Seega võivad nad olla loogikatehete operandideks.

Eelnevad 2 ekvivalentsi on *samaselt tõesed laused*, mis defineerivad **osahulga** mõiste ja **hulkade võrdsuse** mõiste.

Venni diagrammid

Venni diagramme kasutatakse hulkade illustratiivseks graafiliseks esitamiseks.

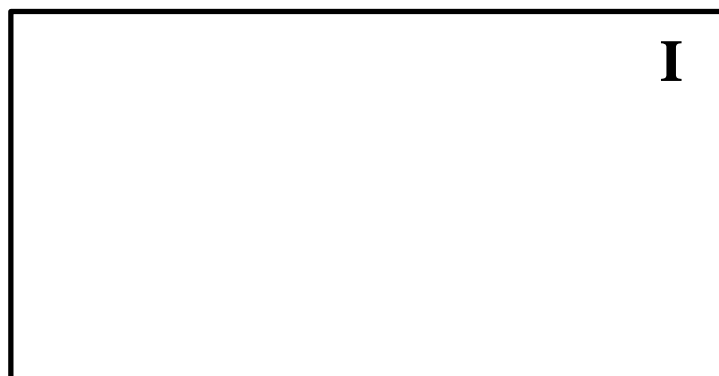
Diagrammil esitatakse hulki ringjoontega, mille sees võivad olla näidatud ka hulgaelemendid.

Universaalhulk

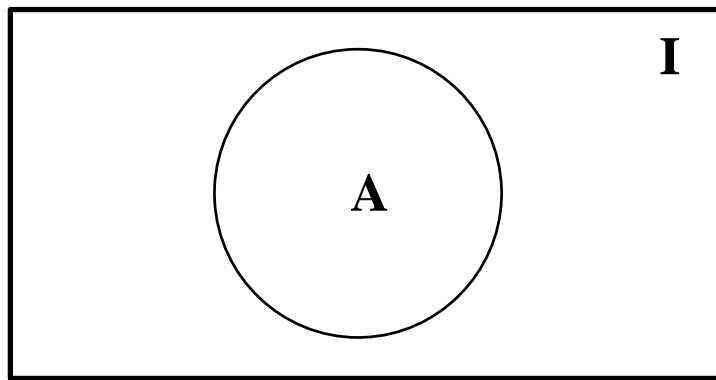
Hulka mittekuuluvate elementide esitamiseks on kasutusele võetud *universaalhulga* mõiste.

Universaalhulga **I** moodustavad elemendid, mis kuuluvad vaadeldavasse hulka ja (ülejäanud) elemendid, mis **ei kuulu** vaadeldavasse hulka.

Venni diagrammil esitatakse universaalhulka ristkülikuna:



Iga vaadeldav hulk **A** on osa universaalhulgast: $A \subset I$:



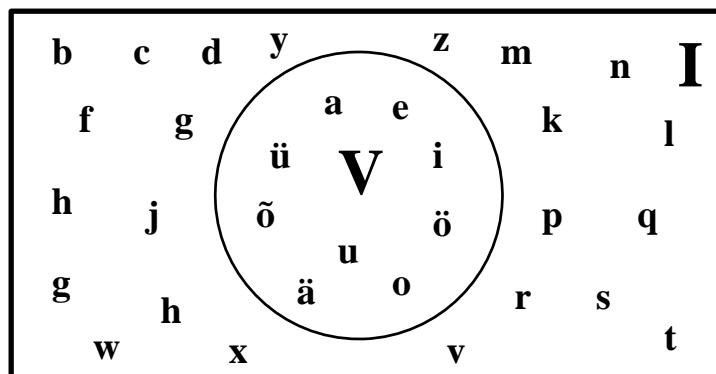
ühe hulga Venni diagramm

Universaalhulk sisaldab **kõiki** antud kontekstis vaadeldavaid elemente.

Vokaalide hulga $V = \{ a e i o u õ ä ö ü \}$ vaatlemisel sobib universaalhulgaks kõigi tähtede hulk :

$$I = \{ a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z õ ä ö ü \}$$

Sellise universaalhulga korral oleks Venni diagramm vokaalide hulgale V :



Hulga täiend

Täiend on ainus *unaarne* ehk ü h e operandiga hulgatehe.

Hulka A mittekuuluvad elemendid moodustavad hulga A täiendi \overline{A} . Eelnevalt näiteks toodud vokaalide hulga V täiend on :

$$\overline{V} = \{ b c d f g h j k l m n p q r s t v w x y z \}$$

Kui $I = \{ E T K N R L P \}$ ja $A = \{ L P \}$ siis $\overline{A} = \{ E T K N R \}$

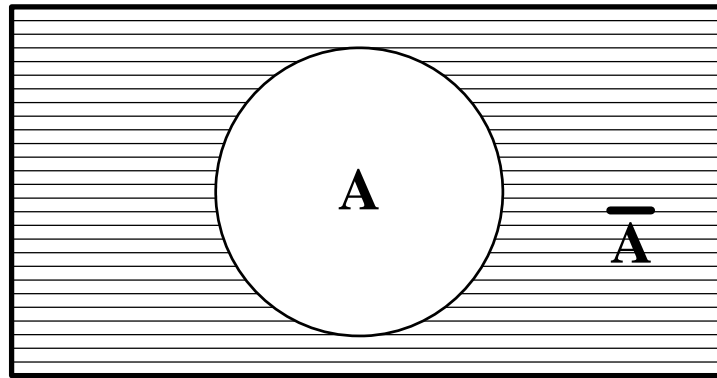
" hulga täiend " \equiv " hulga täiend universaalhulgani "

Hulga A täiendi \overline{A} definitsioon:

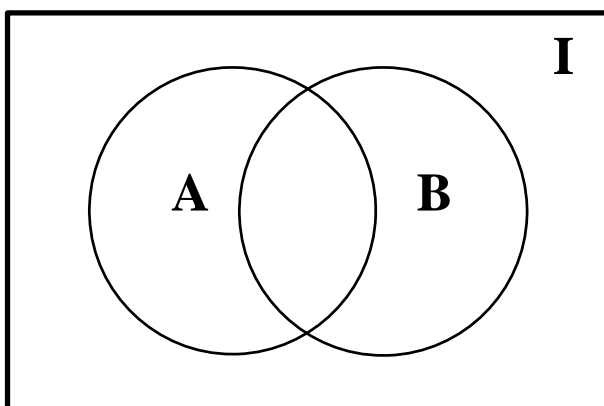
$$\overline{A} = \{ x \mid x \notin A \}$$

Ei leidu selliseid elemente, mis ei kuulu vaadeldavasse hulka ega ei kuulu ka tema täiendisse.

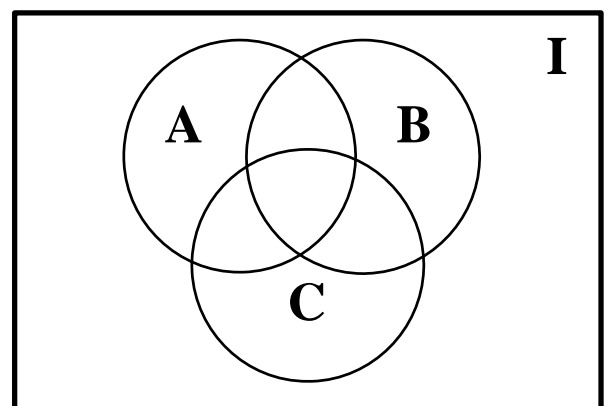
Kõik vaadeldavad hulkade elemendid asuvad universaalhulgas ehk Venni diagrammi mõistes: kõik vaadeldavad elemendid asuvad kuskil (universaalhulka esitava) ristküliku sees.



Hulga A täiend \overline{A}



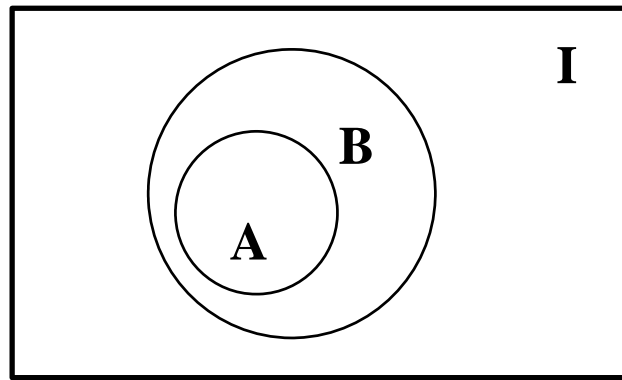
Kahe hulga Venni diagramm



Kolme hulga Venni diagramm

Kahe hulga üldisel diagrammil on **4** piirkonda ja kolme hulga üldisel diagrammil on **8** piirkonda.

2 hulga Venni diagramm erijuhul, kui üks hulk sisaldub teises: $A \subset B$



$$A \subset B$$

Tühi hulk

Hulgas võivad elemendid ka täielikult puududa: $\{ \}$

Elementideta hulka nimetatakse *tühjaks*.

Tühja hulka tähistatakse ka \emptyset ehk: $\emptyset = \{ \}$

Eksisteerib üksainus *tühi hulk* (ehk kui \emptyset_1 ja \emptyset_2 on mõlemad tühjad hulgad, siis: $\emptyset_1 = \emptyset_2$)

Tühi hulk \emptyset on iga hulga osahulgaks: $\forall A (\emptyset \subset A)$

Kuna eelnevalt oli märgitud, et $A \subset A$, siis kehtib iga hulga jaoks:

$$\forall A (\emptyset \subset A \wedge A \subset A)$$

Astmehulk

Mingi hulga A *astmehulgaks* 2^A ehk $P(A)$ (ingl. *power set*) nimetatakse selle hulga kõikide osahulkade hulka.

Astmehulga elementideks on seega samuti hulgad ("hulkade hulk").

--- näited: ----- \

Olgu antud hulk $A = \{ a, b \}$. Sellise hulga A astmehulk on:

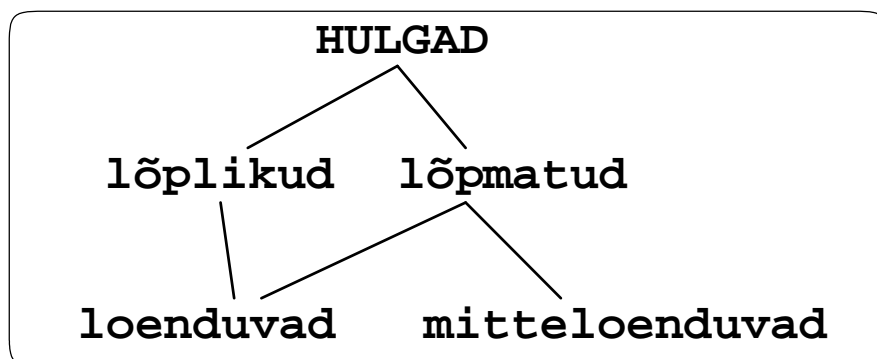
$$2^A = P(A) = \{ \{ \}, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \}$$

Hulga $\{ 0, 1, 2 \}$ astmehulk on:

Tegelikult asub nende kahe vaadeldava arvu "vahel" mitte 1 ega 9, vaid lõpmata palju teisi reaalarve. Erinevalt *täisarvudest* on *reaalarvude* hulk seega *pidev* ja sellest tulenevalt *mitteloenduv*.

Reaalarvude pidevusomadusele vastandades võime täisarvude (ja naturaalarvude) hulki nimetada *diskreetseteks* hulkadeks.

Nagu eespool märgitud, ei tegele *Diskreetne Matemaatika* reaalarvudega.



hulkade liigitumine **lõplikkuse** ja **loenduvuse** alusel

Hulgaaritmeetilised tehted

On olemas **1** *unaarne* (ühe operandiga) ja **4** *binaarset* (kahe operandiga) hulgaaritmeetilist tehet.

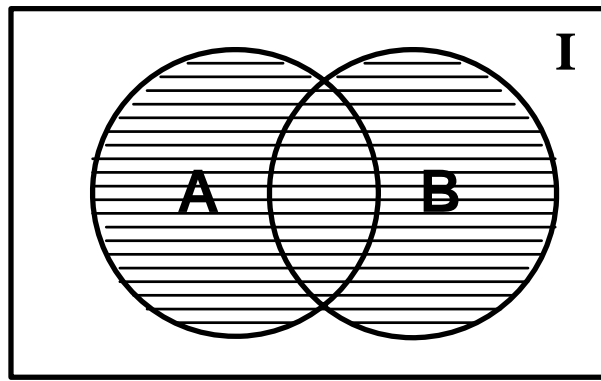
Ainus unaarne tehe on eelnevalt vaadeldud hulga *täiendi* leidmine.

Järgnevalt on defineeritud ülejäänud 4 hulgaaritmeetilist tehet.

◆ **hulkade ÜHEND** \cup (hulgaaritmeetiline *liitmine*)

Kahe hulga **A** ja **B** **ühendisse** $A \cup B$ kuuluvad elemendid, mis kuuluvad kas hulka **A** või hulka **B**:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$



$$A \cup B$$

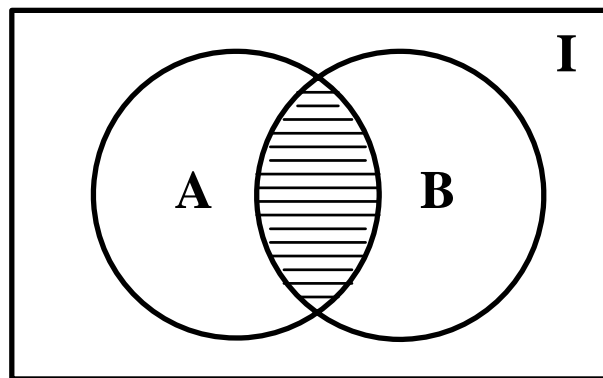
hulkade ühend

Mistahes hulkade korral kehtivad: $A \subset A \cup B$ $B \subset A \cup B$

♦ hulkade **ÜHISOSA** \cap (hulgaaritmeetiline *korrutamine*)

Kahe hulga **A** ja **B** ühisosasse $A \cap B$ kuuluvad elemendid, mis kuuluvad hulka **A** ja samal ajal ka hulka **B**:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$



$$A \cap B$$

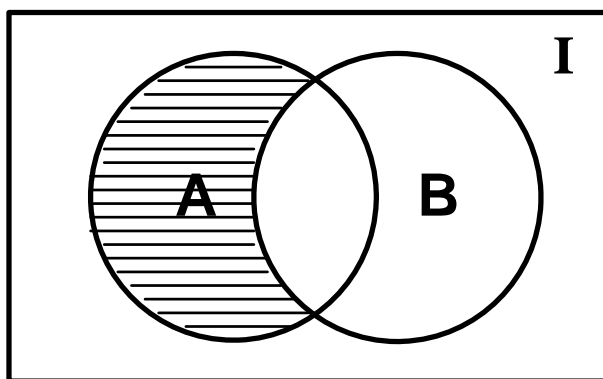
hulkade ühisosa

Mistahes hulkade korral kehtivad: $A \cap B \subset A$ $A \cap B \subset B$

♦ hulkade **VAHE** \setminus (hulgaaritmeetiline *lahutamine*)

Kahe hulga **A** ja **B** vahe $A \setminus B$ moodustavad elemendid, mis kuuluvad hulka **A** ja samal ajal ei kuulu hulka **B**:

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$



$$A \setminus B$$

hulkade vahe

"A ilma B-ta"

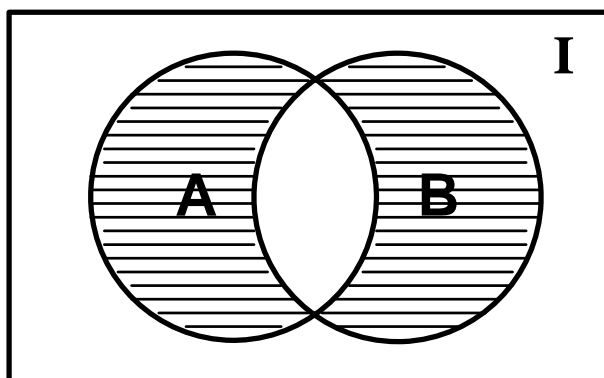
Näeme, et üldjuhul $A \setminus B \neq B \setminus A$

Hulga täiendit \overline{A} saab lahutamistehte \setminus abil esitada: $\overline{A} = I \setminus A$

◆ hulkade **SÜMMEETRILINE VAHE** Δ

Kahe hulga A ja B sümmeetrilise vahe $A \Delta B$ moodustavad elemendid :

$$A \Delta B = \{ x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \}$$



$$A \Delta B$$

hulkade sümmeetriline vahe

Hulgatehete prioriteet

Kui sulgudega pole määratud teisiti, siis tehted teostatakse hulgaavaldises sellises järjekorras:

Hulgatehete prioriteet:

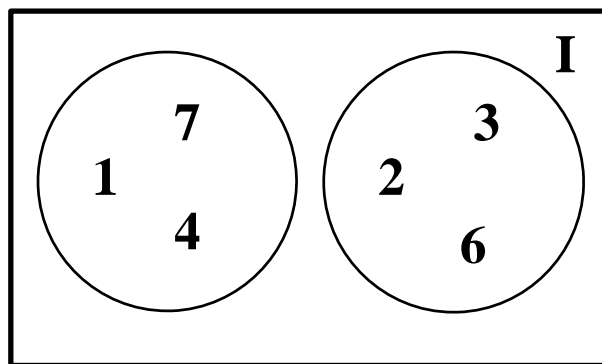


Mittelõikuvad hulgad

Kui $A \cap B = \emptyset$, siis hulgad A ja B on *mittelõikuvad*.

näide: $\{1\ 4\ 7\}$ ja $\{2\ 3\ 6\}$ ei oma ühiseid elemente ehk nad on *mittelõikuvad* hulgad.

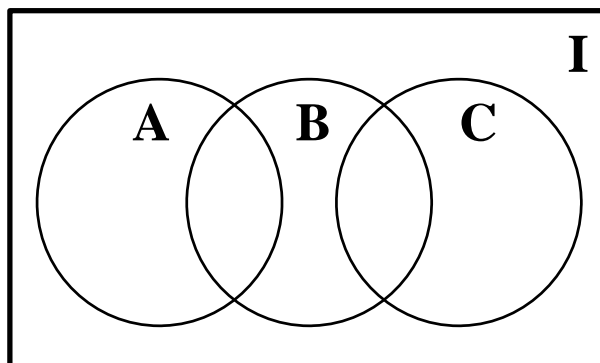
Ühisosata ehk mittelõikuvatele hulkadele vastav kahe hulga Venni diagramm:



mittelõikuvad hulgad

$\{1, 4, 7\}$ ja $\{2, 3, 6\}$

Kolme hulga Venni diagramm erijuhul, kui A ja C on *mittelõikuvad*.



3 hulga diagramm erijuhul

$A \cap C = \emptyset$

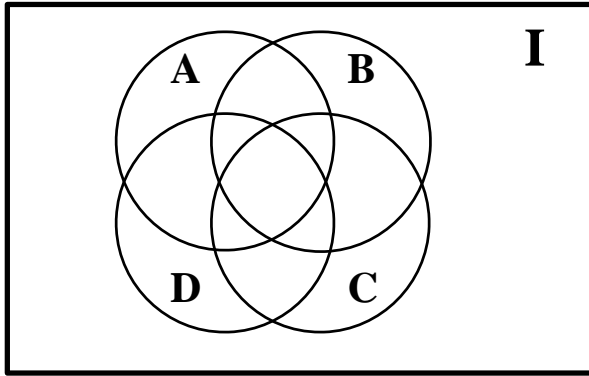
Nelja hulga Venni diagramm

Eelnevalt vaatlesime ühe, kahe ja kolme hulga Venni diagramme.

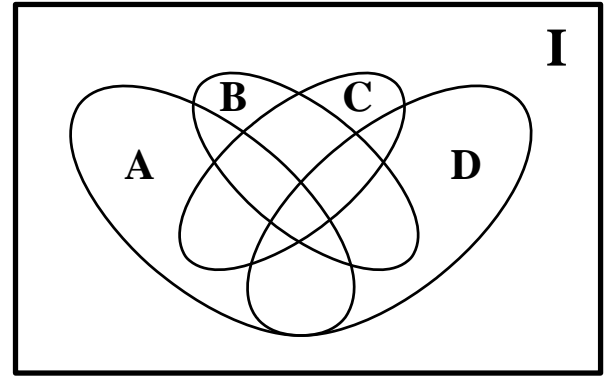
Kuni kolme hulga on Venni diagrammid lihtsad ja hästiloetavad.

Neljanda hulga lisamisel diagrammi visuaalne ülevaatlikkus väheneb oluliselt.

Proovime koostada nelja hulga Venni diagrammi:



ei ole nelja hulga Venni diagramm



nelja hulga Venni diagramm

Eelneval parempoolsel diagrammil leiduvad kõik vajalikud **16** piirkonda ehk tegemist on 4 hulga üldise Venni diagrammiga. (kontrollida!)

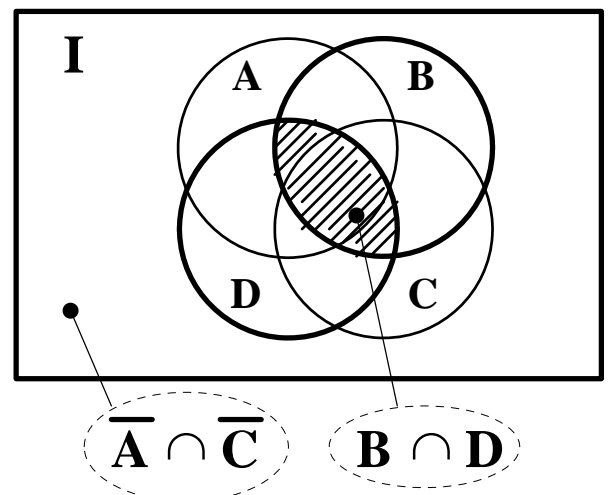
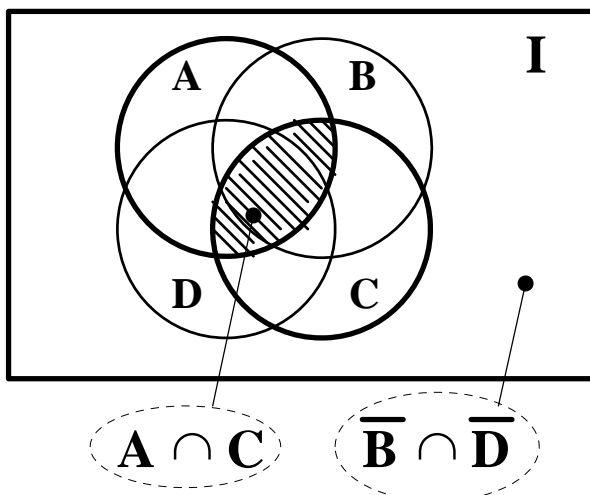
Eelnev vasakpoolne diagramm aga **ei sobi** nelja hulga üldiseks Venni diagrammiks, kuna vajaliku 16 kattumispiirkonna asemel on seal ainult 14.

Puuduvad piirkonnad

$$\mathbf{A \cap B \cap C \cap D} \quad \text{ja}$$

$$\mathbf{A \cap B \cap C \cap D}$$

Selles veendumiseks on kiireim võtte lokaliseerida vasakul diagrammil näiteks piirkond $\mathbf{A \cap C}$ ning vaadelda seejärel piirkonda $\mathbf{B \cap D}$. Ilmneb, et nad ei oma tõesti ühisosa:



Nelja ringiga diagramm sobib 4 hulga Venni diagrammiks ainult erijuhul, kus esitatavate 4 hulga jaoks kehtib:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{D} = \emptyset \quad \text{ja} \quad \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D} = \emptyset$$

Hulga võimsus

Lõpliku hulga \mathbf{A} võimsuseks $|\mathbf{A}|$ nimetatakse tema elementide arvu.

näide: Hulga $\mathbf{V} = \{ \mathbf{a} \mathbf{e} \mathbf{i} \mathbf{o} \mathbf{u} \tilde{\mathbf{o}} \mathbf{\ddot{a}} \mathbf{\ddot{o}} \mathbf{\ddot{u}} \}$ võimsus $|\mathbf{V}| = 9$

Hulgaavaldised

Eelnevalt defineeritud hulgaaritmeetiliste tehete abil saab koostada hulgaavaldisi. Hulgaavaldise mõiste saame defineerida järgnevalt:

definiitsioon:

◆ hulgetähis \mathbf{A} , tühi hulk \emptyset ja universaalhulk \mathbf{I} on hulgaavaldised

◆ kui \mathbf{A} on hulgaavaldis, siis on hulgaavaldised ka $\overline{\mathbf{A}}$ ja (\mathbf{A})

◆ kui \mathbf{A} ja \mathbf{B} on hulgaavaldised, siis on hulgaavaldised ka

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{B}$$

Eelnev määratlus välistab hulgaavaldiste seast ebakorrektsed märgikooslused, nagu näiteks: $\mathbf{A} \cup \cap \mathbf{B}$ $(\) \mathbf{A} \mathbf{B} \setminus$

Duaalsed hulgaavaldised

Kui hulgaavaldises asendada

◆ kõik ühisosatehted \cap tehete \cup ;

◆ kõik ühenditehted \cup tehete \cap ;

◆ kõik tühjad hulgad \emptyset universaalhulgaga \mathbf{I} ;

◆ kõik universaalhulgad \mathbf{I} tühja hulgaga \emptyset ;

..... siis selliselt muudetud avaldis on esialgse avaldise suhtes *duaalne*.

Duaalsed avaldised esinevad seega alati paaridena, kus mõlemad avaldised on teineteise suhtes duaalsed.

näide: Järgnevad 2 avaldist on *duaalsed*:

$$\bar{\mathbf{A}} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$$

$$\bar{\mathbf{A}} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$$

Samuti on duaalne järgnev võrdustepaar:

$$\mathbf{A} \cap \bar{\mathbf{A}} = \emptyset$$

$$\mathbf{A} \cup \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$$

Hulgaavaldiste / Hulgavõrduste **duaalsusprintsip**

Kui 2 hulgaavaldist on võrdsed

(... mõlemad loovad / genereerivad sama hulga), **siis nende duaalsed avaldised on samuti võrdsed:**

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} = \mathbf{B} & \text{erinevad kuid VÕRDSED avaldised} & \\ \downarrow & & \\ \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d & \text{leides mõlemale tema DUAALSE kuju...} \\ \mathbf{A}_d = \mathbf{B}_d & \text{....siis need DUAALSED avaldised} & \\ & \text{on samuti võrdsed (teineteisega)} & \end{array}$$

Grassmanni valemid

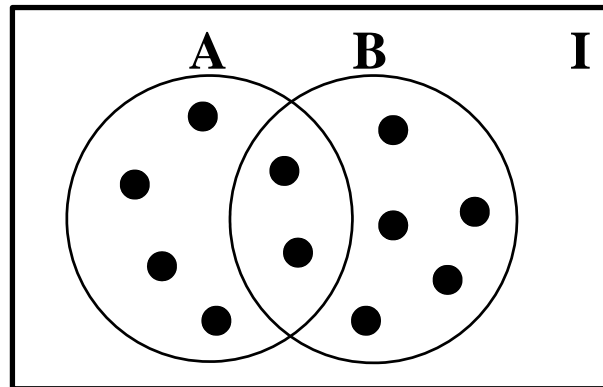
Grassmanni valemid esitavad hulkade *ühisosa* või *ühendi* elementide arvu. Grassmanni valemite kehtivus on vastaval Venni diagrammil visuaalselt kergesti kontrollitav.

Grassmanni valemid kahele hulgale

Kahe hulga **ühendi** $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ elementide arv $|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}|$ avaldub:

$$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$$

Venni diagrammilt nähtub, et summa $|A| + |B|$ sisaldab *ühisosa* elementide arvu $|A \cap B|$ kahekordselt. Tegelikult $|A \cup B|$ saamiseks tuleb seega $|A \cap B|$ sellest summast ühekorra maha lahutada:



$$|A \cup B| = 11 \qquad |A \cap B| = 2 \qquad |A| + |B| = 13$$

Kahe hulga **ühisosa** $A \cap B$ elementide arv $|A \cap B|$ avaldub eelneva suhtes *duaalse* valemiga:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

... näeme, et eelnevad *Grassmanni valem*ed on teineteisega **duaalsed** võrdused

*Grassmanni valem*id kolmele hulgale

Kolme hulga **ühendi** $A \cup B \cup C$ elementide arv $|A \cup B \cup C|$ avaldub :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

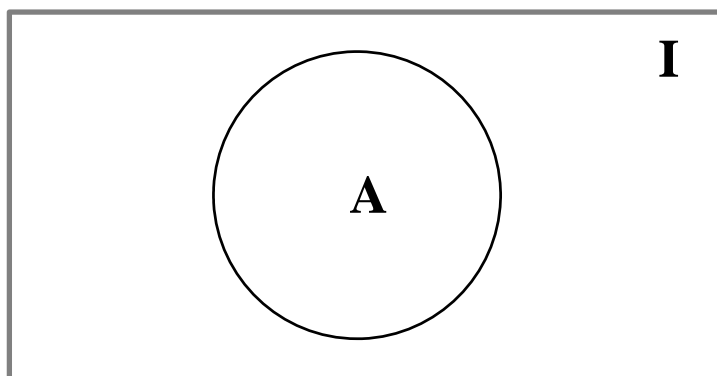
Kolme hulga **ühisosa** $A \cap B \cap C$ elementide arv $|A \cap B \cap C|$ avaldub ühendi elementide arvu valemi suhtes *duaalse* valemina :

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|$$

Kolme hulga *Grassmanni valemite* kehtimises võime veenduda 3 hulga Venni diagrammi analüüsis.

HULGAALGEBRA PÕHISEOSED kuni 2 hulga osalusel

Põhiseosed eksisteerivad *duaalsete paaridena*.



ühe hulga Venni diagramm

HULGAALGEBRA PÕHISEOSED

$$A = \overline{\overline{A}}$$

$$\overline{I} = \emptyset$$

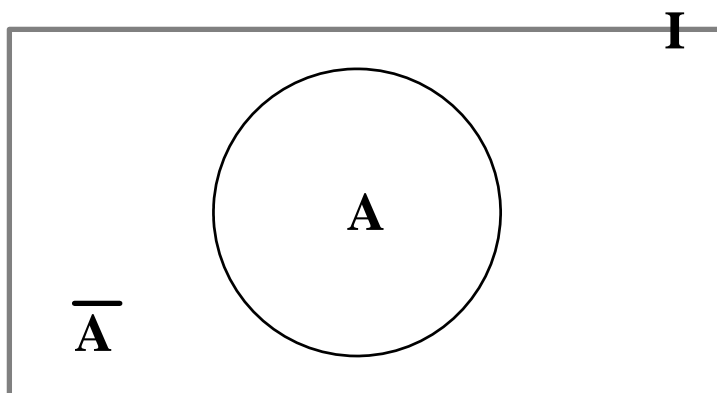
$$\overline{\emptyset} = I$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap I = A$$

$$A \cup I = I$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$



$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup \overline{A} = I$$

idempotentsus:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

kommutatiivsus:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

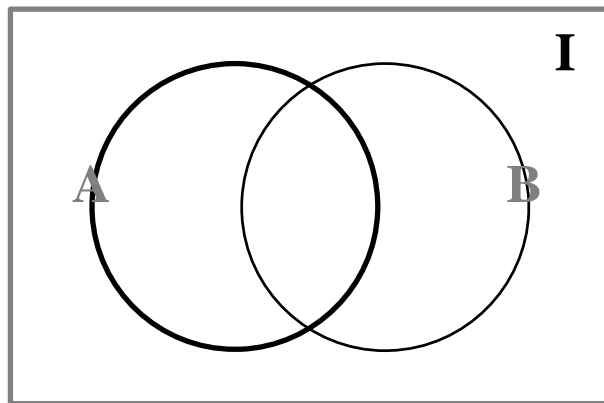
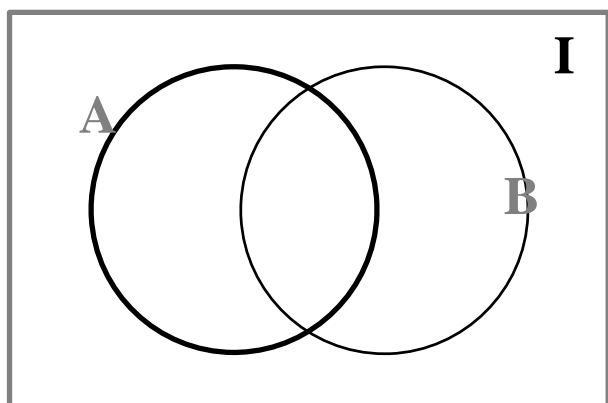
verbaalsel kujul: "... tehte tulemus ei olene operandide järjekorrast ..."

neeldumine:

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

2 hulga **Venni diagramm** :



neeldumine:

$$A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$$

$$A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$$

DeMorgani seadused

(kahe hulga jaoks):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$