

Loogikafunktsioonide normaalkujud

Loogikafunktsioon $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ võib olla esitatud erinevate valemite abil.

Näiteks:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 \vee x_2 = x_1 \overline{x_2} \vee x_2 = \\ &= (x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee x_2) \& (x_2 \vee \overline{x_2}) = \dots \end{aligned}$$

- Loogikafunktsiooni esitusvalemite eelistatakse nn. normaalkujusid (disjunktiivne, konjunktiivne).
- Disjunktiivne normaalkuju (DNK) on valem, mis koosneb elementaarkonjunktsioonide disjunktsioonist.

Näiteks:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_2 x_3$$

- Elementaarkonjunktsioon koosneb algtermide konjunktsioonist.
- Konjunkttiivne normaalkuju (KNK) on valem, mis koosneb elementaardisjunktsioonide konjunktsioonist.

Näiteks:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

- Elementaardisjunktsioon koosneb algtermide disjunktsioonist.
- Iga funktsioon on esitatav DNK ja KNK kujul, kuid mitte üheselt.

- Täielik DNK (TDNK) on selline DNK, kus iga elementaar-konjunktsiooni pikkus on n (s.o. iga elementaarkonjunktsioon sisaldab funktsiooni kõiki argumente ehk tegemist on konstituendiga).

Näiteks:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3$$

- Täielik KNK (TKNK) on selline KNK, kus iga elementaar-disjunktsiooni pikkus on n (s.o. iga elementaardisjunktsioon sisaldab funktsiooni kõiki argumente).

Näiteks:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

- Igal funktsioonil on täpselt üks TDNK ja üks TKNK.

Näiteid

$$\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2 x_3}$$

Parempoolne valem on funktsiooni täielik DNK.

$$\begin{aligned} \overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} &= \\ &= (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \end{aligned}$$

Parempoolne valem on funktsiooni täielik KNK.

$$(\overline{x_1 x_2}) \rightarrow (\overline{x_1} \rightarrow x_3) = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$$

Parempoolne valem on antud funktsiooni DNK, KNK, TKNK.

Loogikafunktsiooni võib esitada ka nn. numbrilises ehk kümnendesitusvormis. Sel juhul esitatakse funktsiooni ühtede või nullide piirkond vastavate argumendivektorite kümnendekvivalentide abil.

Näiteks

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}x_3 = \\ = \Sigma(2,3,5)_1 = \Pi(0,1,4,6,7)_0$$

Kasutatud näitefunktsiooni tõeväärtustabel:

<i>Nr.</i>	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$\overline{f(x_1, x_2, x_3)}$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	0	1

Täielikud normaalkujud:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3$$

$$\overline{f(x_1, x_2, x_3)} = \overline{x_1} \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \& \overline{x_2} \& x_3 \vee$$

$$\vee x_1 \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3$$

$$\overline{\overline{f(x_1, x_2, x_3)}} = \overline{\overline{x_1} \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \& \overline{x_2} \& x_3 \vee}$$

$$\vee x_1 \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_1} \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \& \overline{x_1} \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \&}$$

$$\& \overline{x_1} \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \& \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \& \overline{x_1} x_2 x_3}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \&$$

$$\& (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

- Minimaalse keerukusega DNK-d nimetatakse minimaalseks DNK-ks.
- Minimaalse keerukusega KNK-d nimetatakse minimaalseks KNK-ks.

Ülesanne

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow (\overline{x_2} \vee x_3)) \leftrightarrow (\overline{x_1} \vee x_2)$$

Leida antud loogikafunktsiooni

- kümnendesitusvorm
- minimaalne DNK
- minimaalne KNK
- täielik DNK
- täielik KNK.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$$



Minimeerimine normaalkujude klassis

- **Boole'i ruum** $\{0,1\}^n$: kõikvõimalike kahendvektorite (x_1, x_2, \dots, x_n) hulk.
- **Hüperkuup** (*n-mõõtmeline kuup*): graaf, mille iga tipp vastab üks-üheselt ruumi $\{0,1\}^n$ ühele vektorile ja 2 tippu on omavahel seotud, kui vastavad vektorid on ortogonaalsed (s.o. erinevad) täpselt ühe argumendi järgi ja langevad kokku ülejäänud $(n-1)$ -s argumendis.
- **Intervall** on vektorite (x_1, x_2, \dots, x_n) hulk, mis moodustavad teatava suurusega hüperkuubi.
- **Antud funktsiooni ühtede intervall** on intervall, mille koosseisus olevate vektorite jaoks
 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$.
- **Maksimaalne ühtede intervall** on ühtede intervall, mis ei sisaldu üheski teises ühtede intervallis.

Näide

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(0, 1, 2, 3, 7)_1$$

Ühtede intervallid: $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{7\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,7\}, \{0,1,2,3\}$.

Maksimaalsed ühtede intervallid: $\{3,7\}, \{0,1,2,3\}$.

Intervallide esitus baasis $\{0,1,-\}$

$$\begin{aligned} \text{Näiteks: } \{1\} &\rightarrow 0 \ 0 \ 1 \rightarrow \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \\ \{0,1,2,3\} &\rightarrow 0 \ - \ - \rightarrow \overline{x_1} \\ \{3,7\} &\rightarrow - \ 1 \ 1 \rightarrow x_2 x_3 \end{aligned}$$

- Konjunktsiooni, mis vastab ühtede intervallile, nimetatakse funktsiooni implikandiks.
- Konjunktsiooni, mis vastab maksimaalsele ühtede intervallile, nimetatakse funktsiooni lihtimplikandiks.
- Kõigi lihtimplikantide disjunktsioon esitab funktsiooni **taandatud DNK**.

Näide:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(1,3,6,7)_1$$

Lihtimplikandid: $\{1,3\} \rightarrow 0 - 1$

$$\{3,7\} \rightarrow - 1 1$$

$$\{6,7\} \rightarrow 1 1 -$$

Taandatud DNK:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$$

- Taandatud DNK võib sisaldada liiaseid liikmeid.

Minimaalne DNK:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 \vee x_1x_2.$$

Kõik eelpool esitatu võib olla interpreteeritud nullide piirkonna ja vastavalt KNK jaoks (maksimaalne nullide intervall, taandatud KNK jne.)