HULGATEOORIA PÕHIMÕISTEID

HULK - algmõiste, intuitiivse definitsiooni järgi objektide kogum.
George Cantor (1845-1918) - saksa matemaatik, hulgateooria rajaja.

Hulgad jaotuvad lõpmatuteks ja lõplikeks. Meie kursuses käsitletakse lõplikke hulki, mõnikord ka lõpmatuid loenduvaid hulki.

- **<u>Hulgateoreetilised operatsioonid</u>**
  - Hulkade ühend

$$A \cup B = \{ x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \}$$

  - Hulkade ühisosa (lõige)

$$A \cap B = \{ x \mid (x \in A) \,\&\, (x \in B) \}$$

  - Hulga täiend

$$\overline{A} = \{ x \mid (x \in I) \,\&\, (x \notin A) \},$$

kus I on nn. universaalhulk.

• Hulkade vahe

$$A \setminus B = \{ x \mid (x \in A) \,\&\, (x \notin B) \}$$

• Hulkade sümmeetriline vahe

$$A \Delta B =$$
$$= \{ x \mid ((x \in A) \,\&\, (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \,\&\, (x \in B)) \}$$

Hulga A astmehulgaks 2^A nimetatakse hulga A kõigi alamhulkade hulka.

Hulgateoreetiliste operatsioonide omadused

- Kommutatiivsusseadused

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

- Assotsiatiivsusseadused

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- Distributiivsusseadused

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- **De Morgani seadused**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- **Idempotentsusseadus**

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

- **Välistatud kolmanda seadused**

$$\mathbf{A} \cup \overline{A} = \mathbf{I} \text{ ja } \mathbf{A} \cap \overline{A} = \varnothing$$

- **Topelttäiendi seadus**: $\overline{\overline{A}} = A$

$$\mathbf{A} \cap \varnothing = \varnothing \qquad \mathbf{A} \cap \mathbf{I} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \cup \varnothing = \mathbf{A} \qquad \mathbf{A} \cup \mathbf{I} = \mathbf{I}$$

- **Neeldumisseadused**

$$\mathbf{A \cup (A \cap B) = A \ \text{ ja } \ A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B}$$

$$\mathbf{A \cap (A \cup B) = A \ \text{ ja } \ A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B}$$

- **Kleepimisseadused**

$$\mathbf{(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A}$$

$$\mathbf{(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A}$$

- $\mathbf{A \setminus B = A \cap \overline{B}}$
- $\mathbf{A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$

Ülesandeid

Lihtsustada:

$$\overline{(A \cup B)} \cap (A \setminus B)$$

Kas kehtivad järgmised hulgateoreetilised võrdused:

$$\overline{\overline{(A \cup B)} \cap \overline{A}} = A \setminus ((A \setminus B) \cap \overline{(A \cup B)})$$

$$\overline{A} \cup (\overline{B} \setminus \overline{C}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cap \overline{C})$$

$$A \setminus (A \cap B) = \overline{B} \setminus \overline{A}$$

Lihtsustada hulgateoreetilised avaldised,
esitada Cantori normaalkujul:

$$((A \setminus B) \cup (A \Delta B) \cup (A \setminus C)) \cap \overline{A} = ?$$

$$A \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = ?$$

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = ?$$

$$(\overline{\overline{(A \setminus B)} \cap \overline{(B \setminus C)}} \cup \overline{(C \setminus A)} = ?$$

Ülesandeid:

- H(A,B,C) = (0,2,3,4,6)

Leida TCNK ja MCNK

- H(A,B,C,D) = (0,1,4,5, 8,9,14)

Leida MCNK

- $((\mathbf{A} \,\Delta\, \mathbf{B}) \setminus \mathbf{C}) \cup \mathbf{D}$

Leida MCNK

- Millal kehtib: $\mathbf{A} \,\Delta\, \mathbf{B} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$

- Leida hulk X, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ A \cup X = C \\ B \subset A \subset C \end{cases}$$

- Tõestada, et järgmised võrdused kehtivad:

$$A \Delta (A \cap B) = A \setminus B$$

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$$

- Millistel lisatingimustel kehtivad järgmised võrdused?

$$A \setminus B = B \setminus A$$

$$A \Delta B = B \setminus A$$

Hulkade võimsus ja Grassmani valemid

Lõpliku hulga A võimsuseks nimetame selle hulga elementide arvu (tähistame $|A|$).
Grassmani valemid võimaldavad arvutada hulkade ühendi võimsust:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| =$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$$
$$+ |A \cap B \cap C|$$

Ülesandeid

- Tudengirühmas on 25 inimest. Eksamieelduseks on saada kahe kontrolltöö arvestused. Esimesel kontrolltööl sai arvestuse 20 tudengit, teisel 21 tudengit. Kui palju tudengeid (minimaalselt ja maksimaalselt) pääseb eksamile?

- Hulk A koosneb naturaalarvudest 1 kuni 1000. Leida, mitu hulga A elementi ei jagu ei kolmega ega viiega.

- Viidi läbi küsitlus 100 tudengi hulgas (huvialade jaotus). Vastuste analüüs näitas: 28 tudengit pidasid oma huvialaks kunsti, 30 tudengit - muusikat ja 42 tudengit - sporti. 10 tudengit tundis huvi nii kunsti kui spordi, 5 tudengit - kunsti ja muusika ning 8 tudengit spordi ja muusika vastu. Nende hulgast 3 tudengit ütles ennast huvi tundvat kõigi kolme ala vastu. Kui palju tudengeid tunneb huvi ainult spordi vastu? ainult muusika vastu? mitte ühegi vastu nimetatud kolmest alast.

- Füüsika-matemaatika teaduskonna iga tudeng tunneb huvi kas füüsika või matemaatika vastu. Kui palju tudengitest tunneb huvi mõlema ala vastu, kui on teada, et matemaatikahuvilisi on 84% ja füüsikahuvilisi - 64%?

Hulkade ristkorrutis

$A \times B = \{ \langle a,b \rangle \mid (a \in A) \,\&\, (b \in B) \}$

$A \times B \neq B \times A$ $\qquad$ $| A \times B | = | A | \times | B |$

Näide: $A = \{ a,b,c \}$ $\qquad$ $B = \{1,2\}$

$A \times B = \{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle, \langle c,1\rangle, \langle c,2\rangle\}$

Osaliselt ja täielikult määratud funktsioonid: $F \subset A \times B$

Mitme hulga ristkorrutis $A \times B \times C \times D \times \ldots\ldots \times Y =$
$= \{\langle a, b, c, d, \ldots, y\rangle \mid a\in A \,\&\, b\in B \,\&\ldots\ldots y\in Y\}$

(n-1)-kohaline funktsioon on n-kohalise ristkorrutise alamhulgaks.

R x R - tasand
R x R x R - ruum
R x R x R x T - aegruum
Malelaud - ?